平成28年度入学試験問題（後期）

数　　　学

注　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（後　期）

〔1〕

(1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(2) a, b, c についての次の方程式の有理数解をすべて求めよ：

$$a+\sqrt{2}\,b+\sqrt{3}\,c=0$$

(3) p, q, r についての次の方程式の有理数解をすべて求めよ：

$$(1+\sqrt{3})p+(\sqrt{2}-1)q+(\sqrt{3}-\sqrt{2})r=1$$

〔2〕 複素数平面の原点を中心とし，半径1の円周を C とする。

(1) 複素数 α, β が C 上を動くとき $z=\alpha+\beta$ の値の範囲を求めよ。

(2) (1)で更に，α, β, 1が三角形をなすようにという条件をおくとき，z の値の範囲を求め，複素数平面に図示せよ。

〔3〕 数列 $\{a_n\}$ がすべての自然数 n について $0<a_n<1$ をみたしているとする。この数列 $\{a_n\}$ を用いて，一辺の長さが1の正方形 $A_0B_0C_0D_0$ から始めて，四角形 $A_nB_nC_nD_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ を次の規則で定義する。

辺 $A_{n-1}B_{n-1}$, $B_{n-1}C_{n-1}$, $C_{n-1}D_{n-1}$, $D_{n-1}A_{n-1}$ を $a_n : 1-a_n$ に内分する点をそれぞれ A_n, B_n, C_n, D_n とする。

四角形 $A_nB_nC_nD_n$ の面積を S_n とし，$T_k=\sum_{n=1}^{k}S_n$ とする。

(1) すべての自然数 n に対し $a_n=\dfrac{1}{3}$ であるとき，$\lim_{k\to\infty}T_k$ を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ とする。定数 $b_1, \cdots, b_n$ が $0<b_i<1$ $(i=1, \cdots, n)$ をみたすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-b_1)(1-b_2)\cdots(1-b_n)>1-(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

(3) すべての自然数 n に対し $a_n=\dfrac{1}{3^n}$ であるとき，$\lim_{k\to\infty}\dfrac{1}{T_k}$ を求めよ。

〔4〕 $P(x)=x^2-x+\dfrac{1}{2}$ とおく。区間 $I=\left\{\theta \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right\}$ において，$f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\theta)$ を次のように定める：

$$f_1(\theta)=P(\cos\theta),\ f_2(\theta)=P(f_1(\theta)),\ f_3(\theta)=P(f_2(\theta))$$

$f_3(\theta)$ の導関数を $f_3'(\theta)$ と表す。他の $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ に対しても同様とする。

(1) I において，$f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ それぞれの値の範囲を求めよ。

(2) $f_3'(\theta)=0$ となる θ は $f_2'(\theta)=0$ もみたすことを示せ。

(3) I において，$f_3(\theta)$ の極値を求めよ。

〔5〕 4枚のカードの表にそれぞれ1，2，3，4が記されている。4枚のカードを裏返し，よく混ぜて1枚を取り出し，カードに記された数を見て元に戻す。$n\geqq 2$ として，この操作を n 回繰り返すとき，取り出されたカードの数の合計を X_n とする。

(1) n 回の操作で1，2，3，4のカードが出た回数をそれぞれ a, b, c, d 回とする。$X_n=n+4$ となるような a, b, c, d の組合せをすべてあげよ。

(2) $X_n=n+4$ である確率を求めよ。